МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

профессор Шапиро Давид Абрамович

11 сентября 2019 г.

Программы и задания

5 семестр

Программа лекций

I. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(1) Метод характеристик для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными. Задача Коши. Образование разрывов.

(2) Понятие характеристик для систем линейных и квазилинейных уравнений с двумя переменными. Классификация по типам: гиперболические, эллиптические, параболические системы.

(3) Приведение гиперболической системы к каноническому виду. Инварианты Римана, простая волна Римана.

(4) Метод годографа для уравнений газовой динамики. Точные решения для политропного газа.

II. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(1) Волновое уравнение. Вывод из уравнений Максвелла и газодинамики. Решение одномерного волнового уравнения, формула Даламбера.

(2) Приведение гиперболического, эллиптического и параболического уравнения с двумя переменными к каноническому виду.

(3) Приведение многомерных уравнений второго порядка к каноническому виду. Характеристики гиперболического уравнения и их физический смысл.

(4) Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнений теплопроводности. Бегущие волны.

(5) Разделение переменных. Метод Фурье.

III. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

(1) Разделение переменных в задаче круглой мембране. Функции Бесселя.

(2) Разделение переменных в уравнении Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Присоединённые функции Лежандра. Сферические гармоники. Функции Бесселя с полуцелым индексом.

(3) Решение дифференциального уравнения второго порядка вблизи обыкновенной точки и регулярной особой точки. Характеристические показатели.

(4) Функция Гаусса и вырожденная гипергеометрическая функция.

(5) Уравнение Шрёдингера для осциллятора и атома водорода. Полиномы Эрмита и Лагерра.

IV. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

(1) Асимптотика интегралов Интеграл Лапласа.

   а. Случаи стационарной точки на границе и внутри отрезка интегрирования. Асимптотика Г- функции Эйлера.

   б. Метод стационарной фазы. Асимптотика функции Бесселя.

   в. Метод перевала. Асимптотика функций Лежандра и Эйри.

(2) Метод усреднения. Преобразование Боголюбова — Крылова. Асимптотика усредненного решения дифференциального уравнения.

Литература

1. В. Я. Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
2. С. К. Годунов. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
3. И. В. Колоколов и др. Задачи по математическим методам физики. Editorial URSS, 2002.
4. Е. В. Подивилов и др. Рабочая тетрадь по математическим методам физики, Новосибирск: НГУ, 2012.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика; Гидродинамика.
6. Дж. Мэтьюз, Д. Уокер. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1972.
7. Ф. Олвер. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

Дополнительная литература

8. В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. - § 7; Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Изд. 3е. М.: Наука, 1984. - § 11.
9. А. Найфэ. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
10. Р. Рихтмайер. Принципы современной математической физики. М.: Мир, Т.1 - 1982.
11. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. - Гл.VII.

Примерная программа семинаров

профессор Евгений Вадимович Подивилов

1. *Собственные значения. Функции от матриц. Резольвента.* Задачи 14, 2, 5, 20. Решить задачу 20 с помощью собственных значений.

2. *Унитарные и эрмитовы матрицы, проекторы. Матрицы Паули.* Задачи 1, 4, 8. Вывести формулу $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + ie_{ilk}\sigma_k$. Показать, что для всякой матрицы 2×2 коэффициенты разложения $A = a_0\sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ даются формулой $a_\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\sigma_0)$ (σ_0 — единичная матрица). Найти общий вид проектора 2×2. Решить задачу 20 с помощью разложения по матрицам Паули.

3. *Свойства δ-функции. Ортогонализация. Полнота системы функций. Проверка самосопряжённости дифференциальных операторов.* Задачи 21 а,б, 24, 27 а,б, 30. Показать, что оператор $-d^2/dx^2 + U(x)$ самосопряжённая на отрезке [0,1], если функции удовлетворяют граничным условиям: $u(0) = u(1) = 0$; $u'(0) = u'(1) = 0$, линейной комбинации этих двух, или периодическим $u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)$.

4. *Линейные уравнения первого порядка. Характеристики. Условие разрешимости задачи Коши.* Задачи 36 а,б, 37, 38, 42.

5. *Квазилинейные уравнения. Опрокидывание.* Задача 43. Найти точку опрокидывания уравнения Хопфа для начального условия $u(x, 0) = 1 - \mathrm{th}(x)$. Найти закон расширения области неоднозначности. Найти точку опрокидывания неоднородного уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 1$. [+45а].

6. *Системы линейных уравнений. Приведение к каноническому виду.* Задачи 48, 47 а,б. Пример системы квазилинейных уравнений, задача 53.

7. *Инварианты Римана и характеристики в случае двух переменных. Задача о политропном газе.* Задачи 49, 50, 51, 52 [+58].

8. *Характеристические переменные. Области эллиптичности и гиперболичности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду. Исключение первых производных.* Задачи 59 а,б,в, 60 а. Исключить первую производную в уравнениях $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$; $(x - y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$.

9. *Поиск автомодельной подстановки с помощью масштабных преобразований. Автомодельные решения линейного и нелинейного уравнения теплопроводности. Решения нелинейных уравнений типа бегущей волны. Солитоны.* Задача 98. Найти автомодельное решение задачи $u_t = u_{xx}, u(x, 0) = x^3, u(0, t) = 0$. Задача 100 при $n = 2$. Задачи 102, 103, 110 [+108,111].

10. *Решение волнового уравнения, уравнений теплопроводности и Лапласа методом Фурье.* Задачи 68, 71, 72, 73, 75,79. [+76,78].

11. *Разделение переменных уравнения Шредингера в ортогональных системах координат.* Разделить переменные стационарного уравнения Шредингера в сферических координатах. Задачи 88 в, г.

12. *Сферические гармоники. Полиномы Лежандра, Лагерра и Эрмита: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности.* Задачи 127, 128, 130, 157, 158, 137, 159. Получить формулу Родрига для полиномов Лагерра из интегрального представления (2 семинара).

13. *Основные свойства функции Бесселя: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности.* Задачи 161, 162, 139, 142, 143, 144, [+147, 148] (2 семинара).

14. *Характеристические показатели в особых точках. Определяющее уравнение. Гипергеометрические функции.* Выразить $\ln(1+z)/z$ и $(1-z)^n$ через гипергеометрическую функцию. Задачи 120, 152, 153. Выразить функцию Эйри через вырожденную гипергеометрическую функцию. [Решить уравнение Шредингера для атома водорода в параболических координатах].

15. *Асимптотика интеграла Лапласа.* Задачи 177, 163, 180, 181, 182. Найти асимптотику интеграла $\int_0^\infty \exp(-t^2 - a t^{-2})\, dt, a \to \infty$.

16. *Метод стационарной фазы.* Задачи 173, 185, 186, 187.

17. *Метод перевала. Седловые точки, рельеф функции, линии Стокса. Асимптотика функции Эйри.* Задачи 190, 189, 191, 165, 185 (методом перевала).

18. *Асимптотики функции Бесселя и Лежандра. Метод перевала для подынтегральной функции с полюсами.* Задачи 194, 193. Найти асимптотику функции Бесселя с произвольным индексом, пользуясь представлением Шлефли

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{\nu+1}}.$$

19. *Метод усреднения. Преобразование Боголюбова — Крылова.* Задачи 167, 169, 170, 195, 196, 171, 197, 168 [+198].

Контрольная работа: проводится по группам перед началом контрольной недели.
Коллоквиум: проводится после окончания контрольной недели.

ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ № 1 (сдать до 25 октября)

1. Найти e^A тремя способами: разложением в ряд, приведением к диагональному виду и с помощью резольвенты, если

$$A = x\,E + y\,\exists, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exists = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \mathbf{H}]\right)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

в скрещенных полях $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = 0$, где $\mathbf{p} = m\boldsymbol{v}$. Как выглядят характеристики?

3. Решить уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\rho(1-\rho)} = 0$$

с начальным условием $\rho(x,0) = \rho_0(1 + \operatorname{th} x)$, где $0 < \rho_0 < 1/2$ — амплитуда. Найти момент и координату точки опрокидывания. Нарисовать графики зависимости времени и координаты опрокидывания от амплитуды ρ_0.

4. Определить тип уравнения и привести к каноническому виду:

$$y(u_{xx} - u_{yy}) - 2xu_{xy} - u_y = 0.$$

Решить задачу $u(0,y) = 1/\operatorname{ch} y, u_x(0,y) = 0$ и исследовать разрешимость.

ЗАДАНИЕ № 2 (сдать до 25 ноября)

5. Найти семейство преобразований симметрии, свести к обыкновенному дифференциальному уравнению и получить точное решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u.$$

6. Решить уравнение теплопроводности

$$u_t = \chi \triangle u$$

в бесконечном цилиндре радиуса R, если на границе цилиндра температура осциллирует как $u(R,t) = T_0 \sin \omega t$. Исследовать распределение температуры по радиусу при $\omega \gg \chi/R^2$.

7. Найти собственные частоты ω колебаний шара радиуса R с граничным условием

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$$

в пределе $\omega R/c \gg 1$.

8. Показать, что уравнение Шрёдингера для двумерного «атома водорода» в электрическом поле F

$$-\frac{1}{2}\triangle_2 \psi - \frac{\psi}{\sqrt{x^2+y^2}} + Fy\psi = E\psi$$

допускает разделение переменных в параболических координат $x = \xi\eta$, $y = (\xi^2 - \eta^2)/2$. Найти уровни энергии E и волновые функции ψ связанных состояний при $F = 0$. Сравнить с ответом в полярных координатах.

ЗАДАНИЕ № 3 (сдать до 25 декабря)

9. Найти решение $\psi(x,t)$ нестационарного уравнения Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + mgx\psi$$

с начальным условием $\psi(x,0) = A\exp(-|x|/a)$. Исследовать асимптотику на больших временах. С какой скоростью движется центр пакета и как меняется его ширина?

10. С помощью интегрального представления

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{xu}u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\,du$$

найти асимптотику вырожденной гипергеометрической функции, если $x = \gamma\xi, \gamma \to \infty$, при фиксированном $\xi > 1$ или $\xi < 1$.

11. Методом усреднения исследовать эволюцию медленной переменной в уравнении Ван дер Поля с нелинейным трением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(\dot{x} - \dot{x}^3 x^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

Пример экзаменационного билета

1. Найти асимптотику интеграла $\int_0^\infty \exp[-\lambda t^3 - t^{-3}]\, dt, \lambda \to \infty$.
2. Найти решение уравнения $u_t + xu_y - yu_x = u^2, u(0,x,y) = x^2 + y^2$.

Примеры дополнительных задач

1. $\int_0^\infty e^{\lambda(x+1/x)}\, dx, \quad \lambda \to +\infty$.
2. $\int_0^\infty e^{-\lambda(\operatorname{ch}^2 x - x^2/2)}\, dx, \quad \lambda \to +\infty$.
3. $\int_0^\infty \sin^2 t\, e^{\lambda \cos t - \gamma t}\, dt, \quad \lambda \to +\infty$.
4. Решить задачу Коши $xu_y - yu_x = 1, u|_{x=1} = y^2$.
5. Найти решение уравнения Лапласа в шаре с условием $u|_{r=1} = 3\cos^2\theta - 1$.
6. Решить задачу Коши $u_t + uu_x = -x, \quad u(x,0) = x$. Произойдет ли опрокидывание?

Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Метод характеристик. Квазилинейное уравнения I порядка.
2. Канонический вид уравнения II порядка. Формула Даламбера.
3. Автомодельное решение уравнения теплопроводности.
4. Метод Фурье для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.
5. Разделение переменных в цилиндрических и сферических координатах.
6. Функции Бесселя, полиномы Лежандра и Эрмита.
7. Асимптотика интеграла Лапласа. Метод стационарной фазы.

6 семестр

Программа лекций

I. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП

(1) Элементы симметрии молекулы: повороты, отражения, зеркальные повороты. Точечная группа. Абстрактная группа, гомоморфизм, изоморфизм. Примеры конечных групп: $\mathbf{C}n, \mathbf{D}_n, \mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{Y}$.

(2) Основные понятия теории групп: порядок элемента и группы, подгруппа, смежный класс, класс сопряжённых элементов, нормальная подгруппа, центр, фактор-группа.

(3) Матричные представления конечных групп. Единичное, точное, регулярное представления, размерность представления. Приводимые и неприводимые представления. Лемма Шура. Соотношение ортогональности неприводимых представлений. Таблица характеров. Соотношение ортогональности характеров. Разложение представления на неприводимые.

(4) Симметрии, законы сохранения и вырождение в квантовой механике. Снятие вырождения при понижении симметрии. Использование симметрии для расчёта кратности вырождения колебаний молекул.

(5) Общие свойства групп Ли, связность, размерность, компактность. Примеры групп Ли: $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}), \mathbf{U}(n, \mathbb{C}), \mathbf{SU}(n, \mathbb{C}), \mathbf{O}(n, \mathbb{R}), \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. Алгебра Ли, структурные константы. Инфинитезимальные операторы (генераторы). Алгебра Ли группы Ли.

(6) Восстановление группы Ли по её алгебре Ли. Экспоненциальная формула. Группы $\mathbf{SO}(3), \mathbf{SU}(2)$ и их параметризации. Изоморфизм алгебр Ли $\mathbf{ASU}(2)$ и $\mathbf{ASO}(3)$.

(7) Гомоморфизм группы $\mathbf{SU}(2)$ на $\mathbf{SO}(3)$. Спиноры.

(8) Построение неприводимых представлений группы вращений. Повышающий и понижающий операторы, оператор Казимира. Базис представления из сферических гармоник. Связь с квантованием момента импульса.

(9) Тензорное произведение представлений. Разложение Клебша — Гордана. Тензорные представления группы, понятие тензора. Симметричные тензоры, симметризаторы Юнга. Инвариантные тензоры, расчёт количества независимых компонент. Правила отбора.

II. МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

(1) Необходимые условия существования обратного оператора. Фундаментальное решение и функция Грина краевой задачи. Принцип взаимности. Функция Грина уравнения Штурма — Лиувилля на конечном интервале.

(2) Альтернатива Фредгольма. Разложение обратного оператора по проекторам, нуле-вые моды. Обобщенная функция Грина.

(3) Принцип максимума для оператора Лапласа. Единственность решения задач Дирихле и Неймана. Особенность фундаментального решения уравнения Пуассона в пространствах разной размерности. Формула Грина. Функции Грина второго рода для задач Дирихле и Неймана. Потенциалы объёмного заряда, простого и двойного слоя. Функция Грина уравнения Гельмгольца. Применение в квантовой теории рассеяния.

(4) Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение с помощью преобразования Фурье. Единственность решения волнового уравнения. Запаздывающая функция Грина. Правило обхода полюсов. Принцип Гюйгенса — Френеля.

Литература

1. С. К. Годунов. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
2. И. В. Колоколов и др. Задачи по математическим методам физики. УРСС, 2002.
3. Е. В. Подивилов и др. Рабочая тетрадь по математическим методам физики, Новосибирск: НГУ, 2012.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика.
5. Дж. Мэтьюз, Д. Уокер. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1972.
6. М. И. Петрашень, Е. А. Трифонов. Применения теории групп в квантовой механике.

Дополнительная литература

8. Е. Вигнер. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. М.: Изд. иностранной литературы, 1961.
9. Г. Я. Любарский. Теория групп и физика. М.: Наука, 1986.
10. А. Мессиа. Квантовая механика. Т.1,2. М.: Наука, 1979.
11. Дж. Эллиот, П. Добер. Симметрия в физике. Т.I, II. М.: Мир, 1983.

Примерная программа семинаров

профессор Евгений Вадимович Подивилов

1. *Группа симметрии правильного треугольника: таблица умножения, подгруппы, смежные классы.* Задачи 292, 293, 295, 294, 296, 283, 297, 284.

2. *Классы сопряжённых элементов, инвариантные подгруппы, фактор-группы. Группы подстановок.* Задачи 302 (а), 303, 306, 307, 309 (а). Найти порядок групп вращений тетраэдра и куба.

3. *Группа симметрии квадрата и куба. Центр группы.* Задачи 302 (б), 287, 299, 286, 305.

4. *Матрицы неприводимых представлений группы треугольника. Характеры. Соотношения ортогональности. Разложение произвольного представления на неприводимые.* Найти неприводимые представления группы треугольника и построить таблицу неприводимых характеров. Построить и сравнить таблицы неприводимых характеров групп $\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{C}_4$. Задачи 309 (б), 310, 311.

5. *Таблица неприводимых характеров группы квадрата. Кратности вырождения нормальных колебаний симметричной молекулы.* Задачи 344. Двумерная система из трёх одинаковых грузов в вершинах правильного треугольника. Грузы соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Выписать матрицы исходного представления и разложить его на неприводимые. В молекуле C_2H_6 треугольник из атомов водорода развернут относительно второго треугольника на 60°. Найти кратности вырождения нормальных колебаний. [То же для NH_3 и CH_3F].

6. *Действие элемента группы на функциях. Снятие вырождения при понижении симметрии в задачах о колебаниях круглой мембраны и об уровнях энергии квантовой системы. Прямое произведение представлений.* Снимается ли вырождение колебаний круглой мембраны, если на её края помещены четыре одинаковых груза в вершинах квадрата? Задачи 349, 350.

7. *Примеры групп Ли, вычисление размерности. Различные параметризации. Генераторы, алгебры Ли. Восстановление группы Ли по её алгебре с помощью экспоненциальной формулы.* Задачи 329, 328 (в), (г), 315.

8. *Неприводимые представления группы $\boldsymbol{SO}(2)$ и их характеры. Тензорные представления, разложение по неприводимым, инвариантные тензоры.* Найти размерность пространства тензоров n-го ранга, разложить по неприводимым. Сколько независимых компонент имеет тензор третьего ранга, инвариантный относительно группы $\mathbf{SO}(2)$.

9. *Неприводимые представления групп O(2) и SO(3) и их характеры. Оператор Казимира в представлении на функциях.* Задачи 316, 317(а), 333.

10. *Преобразование тензоров при вращении и инверсии. Разложение Клебша - Гордана.* Задача 334. Разложить $\mathrm{D}^{(1)} \otimes \mathrm{D}^{(1)}$ на неприводимые в группе $\mathbf{SO}(3)$. Выделить линейные комбинации компонент бесследового симметричного тензора второго ранга, которые преобразуются при вращении как $Y_{2,m}$.

11. *Симметризация тензоров и разложение симметричного тензора на неприводимые. Представления в пространстве полиномов.* Задача 340(а),(б),(в).

12. *Количество независимых компонент инвариантного тензора. Правила отбора.* Сколько независимых компонент имеет тензор второго ранга, инвариантный относительно группы $\mathbf{SO}(3), \mathbf{D}_3$? То же для симметричного тензора. Найти правила отбора для дипольного момента в группах $\mathbf{SO}(3), \mathbf{D}_3$.

13. *Связь групп* $\mathbf{SU}(2)$ *и* $\mathbf{SO}(3)$*. Оператор Казимира и неприводимые представления.* Задача 317 (б), 318. Линейное преобразование вектора $\mathbf{r}' = \hat{R}\mathbf{r}$ задается формулой
$$(\mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma}) = \exp(-i(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\varphi/2)(\mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma})\exp(i(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\varphi/2).$$
Найти матрицу $\hat{R}$. [341-343].

14. *Построение функции Грина для одномерных краевых задач. Фундаментальное решение. Скачок производной.* Задачи 219, 220, 199, 224 (а), 225 (а), (б), 227.

15. *Функция Грина для оператора Штурма-Лиувилля. Нулевые моды и обобщенная функция Грина. Принцип взаимности.* Задачи 228 (а), (б).

16. *Функция Грина уравнений Пуассона и Гельмгольца.Задачи Дирихле и Неймана. Характер особенностей в двумерном и трёхмерном случаях. Функция Грина второго рода. Интеграл Пуассона. Метод изображений и метод конформных преобразований.* Задачи 230, 231, 232, [233], 204, 236,

17. *Функция Грина уравнений теплопроводности и Фоккера — Планка. Преобразования Фурье по координатам и времени.* Задачи 238, 207 (а), 240, 241, 242 с x^3 [208].

18. *Функция Грина уравнения Шрёдингера. Правило обхода полюсов. Запаздывающая функция Грина волнового уравнения. Формула Кирхгофа.* [Пропагатор уравнения Клейна — Гордона — Фока.] Задачи 207 (б), 246, 209-212 [213].

Контрольная работа: проводится по группам перед началом контрольной недели.
Коллоквиум: проводится после окончания контрольной недели.

ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ № 1 (сдать до 25 марта)

1. Определить порядок и число классов сопряжённых элементов в группе вращений тетраэдра $\mathbf{T}$. Найти инвариантную подгруппу H и фактор-группу $\mathbf{T}/\mathrm{H}$. Построить таблицу неприводимых характеров.

2. В квантовой механике можно обозначить спиновую волновую функцию электрона как $|\uparrow\rangle$, если спин направлен «вверх» или $|\downarrow\rangle$, когда спин направлен «вниз». Состояния $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ ортогональны. Для системы из трёх электронов можно сформировать волновые функции вида $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$ и т.д., всего 8 волновых функций. Эти волновые функции преобразуются друг через друга под действием элементов группы подстановок P_3. Разложить данное представление на неприводимые.

3. Построить таблицу неприводимых характеров полной группы тетраэдра $\mathbf{T}_d$. Четыре одинаковых грузика соединены попарно одинаковыми пружинами так, что в равновесии находятся в вершинах правильного тетраэдра. Найти кратности вырождения нормальных колебаний системы. Можно ли найти собственные частоты, не решая секулярного уравнения?

ЗАДАНИЕ № 2 (сдать до 25 апреля)

4. Построить представление группы вращений в пространстве однородных полиномов третьей степени

$$P(x, y, z) = \sum_{m+n+l=3} C_{mnl} x^m y^n z^l.$$

Найти базис подпространства гармонических полиномов. Разложить исходное представление на неприводимые. Выразить базис неприводимых представлений через сферические функции Y_{lm}.

5. Разложить на неприводимые представление группы вращений $\mathbf{SO}(3)$ на тензорах третьего ранга в трёхмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?

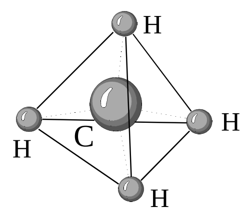
6. Центробежная поправка в гамильтониане молекулы имеет вид $V = \sum_{ijkl} \tau_{ijkl} J_i J_j J_k J_l$, где J_i — вектор углового момента, τ_{ijkl} — симметричный тензор. Сколько независимых компонент содержит тензор τ, если молекула имеет симметрию треугольника $\mathbf{C}_{3v}$?

7. Две переменные преобразуются вещественной матрицей из группы $G = \mathbf{SL}(2)$:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Найти генераторы $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ группы G в представлении на функциях $w(z_1, z_2)$ и их коммутационные соотношения. Найти собственные функции оператора Казимира. Построить повышающий и понижающий операторы для $\hat{I}_3$.

8. Вывести правила отбора для матричных элементов электрического дипольного момента в молекуле метана CH_4 для переходов между состояниями, которые преобразуются по неприводимым представлениям.



ЗАДАНИЕ № 3 (сдать до 25 апреля)

9. Найти функцию Грина и решение уравнения $y''' = f(x)$ с граничными условиями $y(0) = a, y(1) = 0, y'(0) + y'(1) = 0$. При каких a задача разрешима?

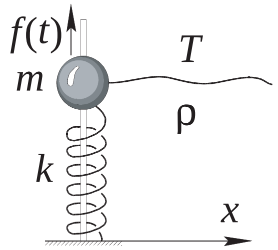
10. Найти функцию Грина неоднородного уравнения теплопроводности на поверхности цилиндра радиуса R:

$$u_t = \chi \triangle_2 u + f(z, \varphi, t).$$

Выписать решение задачи с источником $f(z, \varphi, t) = Q\delta(z - Vt)$.

11. Найти функцию Грина второго рода $G(x, t|t')$ механической системы, состоящей из шарика, скользящего вдоль оси z по вертикальной спице, соединённого с пружинкой и полубесконечной струной, натянутой вдоль положительного направления оси оси x:

$$\rho u_{tt}(x, t) = Tu_{xx}(x, t), \quad mu_{tt}(0, t) = -ku(0, t) + Tu_x(0, t) + f(t).$$



Пример экзаменационного билета

1. Правило обхода полюсов. Построить функцию Грина уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \quad \Psi(x,0) = g(x).$$

2. Каждому повороту группы $\mathbf{D_3}$ соответствует линейное преобразование коэффициентов квадратичной формы $P(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2axy + 2bxz + 2cyz$. Разложить полученное представление на неприводимые.

Примеры дополнительных задач

1. Построить функцию Грина уравнения $y'' + y' - 2y = f(x), y(0) = y'(1) = 0$.
2. Построить функцию Грина уравнения $y'' + \pi^2 y = f(x), y'(0) = y'(1) = 0$.
3. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности на единичной окружности.
4. Какова максимальная размерность неприводимого представления группы A_4 — четных перестановок четырех объектов.
5. Найти число независимых компонент симметричного тензора ранга 3, инвариантного относительно группы $\mathbf{D}_4$.
6. Построить таблицу неприводимых характеров группы $\mathbf{D_6}$.

Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Правые смежные классы, классы сопряжённых элементов, инвариантные подгруппы в группе $\mathbf{D_3}$.

2. Неприводимые представления и характеры $\mathbf{D}_3$, $\mathbf{D}_4$ и $\mathbf{SO}(3)$. Разложение представления группы на неприводимые.

3. Кратность вырождения колебаний молекулы.

4. Размерность $\mathbf{GL}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$. Параметризация группы $\mathbf{SO}(3)$.

5. Функция Грина оператора Штурма — Лиувилля. Условия на скачке. Нулевые моды.

6. Функция Грина уравнений Пуассона и Лапласа. Задачи Дирихле и Неймана.

7. Функция Грина уравнения теплопроводности и волнового уравнения.